



پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

الف) درست

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 3 \\ -4 & -2\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 3 \\ -4 & -2\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$(2A - I)^T = 2A^T + I - 2A = I - 2A$$

ب) نادرست، ماتریس C از مرتبه 2×3 است. پس $D = [d_{ij}]_{a \times b}$ از مرتبه 2×3 است. پس $a = 2$ و $b = 3$ داریم:

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -\frac{9}{2} \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -\frac{9}{2} \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

پس کوچکترین درایه ماتریس D برابر $-\frac{9}{2}$ است نه -2 .

ج) نادرست

د) درست

$$A \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & 13 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 2I \Rightarrow |A| \begin{vmatrix} 2 & -1 & 13 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = |2I| \Rightarrow |A| \times 4 = 8 \Rightarrow |A| = 2$$

(هندسه دوازدهم، صفحه‌های ۱۳، ۱۹، ۲۱ و ۳۰)

پاسخ سؤال ۲: (۱ نمره)

ماتریس $(A - B)^T$ را به دست می‌آوریم:

$$(A - B)^T = (A - B)(A - B) = A^T - AB - BA + B^T \quad (۱) \quad (۵/۰ نمره)$$

از طرف دیگر بنابر فرض:

$$(A - B)^T = A^T - 2AB + B^T \quad (۲)$$

$$(۲) \text{ و } (۱) \Rightarrow A^T - AB - BA + B^T = A^T - 2AB + B^T \Rightarrow -AB - BA = -2AB \Rightarrow AB = BA \quad (۵/۰ نمره)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۱)

پاسخ سؤال ۳: (۱/۵ نمره)

در عبارت خواسته شده از ماتریس A از چپ و از ماتریس B از راست فاکتور می‌گیریم. داریم: (۲۵/۰ نمره)

$$A \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} B - \frac{2}{3} A \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} B = A \left(\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \right) B = A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} B = A (2I) B = 2AB = 2 \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad (۲۵/۰ نمره)$$

(۷۵/۰ نمره)

پس مجموع درایه‌های قطر فرعی این ماتریس مساوی $12 = 4 + 8$ است. (۲۵/۰ نمره)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۱۹)

پاسخ سؤال ۴: (۱/۵ نمره)

ابتدا درایه‌های ماتریس‌های A و B را پیدا می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

(۵/۰ نمره) (۵/۰ نمره)

بنابراین:

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$$

$$BA - I = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \quad (۵/۰ نمره)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۱)



پاسخ سؤال ۵: (۱ نمره)

ماتریس ضرایب این دستگاه $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ است. پس $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (۲۵/۰ نمره). بنابراین:

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (۵/۰ نمره)$$

پس $x = \frac{2}{3}$ و $y = -\frac{1}{3}$ (۲۵/۰ نمره)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۵)

پاسخ سؤال ۶: (۱/۵ نمره)

ماتریس A وارون پذیر نیست. پس $|A| = 0$.

$$|A| = m + 3 - 2m = 0 \Rightarrow m = 3 \quad (۵/۰ نمره)$$

بنابراین:

$$B = \begin{bmatrix} 2m+1 & 1-m \\ m & m+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \quad (۵/۰ نمره)$$

(۲۵/۰ نمره)

پس مجموع درایه‌های ماتریس $B^{-1} = \frac{1}{\Delta} (4 + 1 - 3 + 5) = \frac{1}{\Delta} (7) = \frac{1}{34}$ برابر $\frac{1}{34}$ است. (۲۵/۰ نمره)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۳)

پاسخ سؤال ۷: (۱ نمره)

$$\begin{cases} mx + (m-3)y = 2m+1 \\ (m+6)x - (m+2)y = 5m+1 \end{cases}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \quad \text{شرط بی‌شمار جواب} \quad (۲۵/۰ نمره)$$

$$\frac{m}{m+6} = \frac{m-3}{-m-2} \Rightarrow m^2 + 3m - 18 = -m^2 - 2m \Rightarrow 2m^2 + 5m - 18 = 0 \quad (۵/۰ نمره)$$

$$m = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{4} = \frac{-5 \pm 13}{4} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \checkmark \\ m = -\frac{9}{2} \times \end{cases} \quad (۲۵/۰ نمره)$$

دیده می‌شود $m = 2$ در شرط بی‌شمار جواب صدق می‌کند ولی $m = -\frac{9}{2}$ صدق نمی‌کند.

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۱)

پاسخ سؤال ۸: (۱/۵ نمره)

$$2A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & |A| \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\det} |2A^{-1}| = 2 + |A| \quad (۵/۰ نمره) \Rightarrow 4|A^{-1}| = 2 + |A| \quad (۲۵/۰ نمره)$$

$$\Rightarrow \frac{4}{|A|} = 2 + |A| \xrightarrow{\times |A|} 4 = 2|A| + |A|^2 \Rightarrow |A|^2 + 2|A| - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 1 \\ |A| = -4 \end{cases} \quad (۵/۰ نمره)$$

(۲۵/۰ نمره)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۱)

پاسخ سؤال ۹: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

$$\frac{25}{16}\pi \quad \text{الف)}$$

$$(a+1) = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + x + 4y = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x + 2y - \frac{1}{2} = 0$$

$$R = \frac{\sqrt{\frac{1}{4} + 4 + 2}}{2} = \frac{5}{4} \Rightarrow \text{مساحت دایره} = \frac{25}{16}\pi$$

ب) دو خط متقاطع

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ج)}$$

$$O(-1, 1) \Rightarrow OA = 1, R = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{طول مماس} = \sqrt{OA^2 - R^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

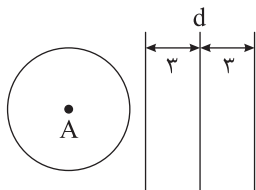
د) ۴، شعاع چنین دایره‌هایی $R + R' = 4$ یعنی $1 + 3 = 4$ است.

(هندسه دوازدهم، صفحه‌های ۳۹، ۴۱ و ۴۳)

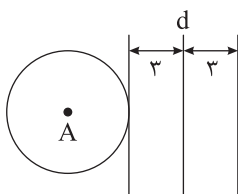
پاسخ سؤال ۱۰: (۲ نمره)

مکان هندسی نقاطی که از A به فاصله ۲ هستند، دایره به مرکز A و شعاع ۲ است (۵/۵ نمره) و مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ هستند دو خط موازی با d در طرفین آن است. (۵/۵ نمره) برخورد این دو مکان هندسی نقاط مورد نظر این سؤال است.

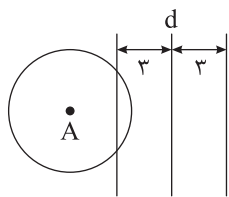
۱- در صورتی که دو خط موازی d دایره به مرکز A را قطع نکنند، مسئله جواب ندارد. (۲۵/۵ نمره) (فاصله A تا d بیشتر از ۵ باشد.)



۲- اگر یکی از دو خط موازی بر دایره مماس باشد، مسئله یک جواب دارد. (۲۵/۵ نمره) (فاصله A تا d برابر ۵ باشد.)



۳- اگر یکی از دو خط موازی دایره را قطع کند، مسئله دو جواب دارد. (۲۵/۵ نمره) (فاصله A تا d کمتر از ۵ باشد.)



۴- چون فاصله دو خط موازی برابر ۶ است و بیشترین فاصله نقاط دایره برابر قطر آن یعنی ۴ است پس حالتی که دایره هر دو خط موازی را قطع کنند، یا بر یکی مماس و دیگری را قطع کند ایجاد نمی شود. پس این مسئله حداکثر ۲ جواب دارد. (۲۵/۵ نمره)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۹)

پاسخ سؤال ۱۱: (۱ نمره)

معادله ضمنی دایره را به صورت استاندارد می نویسیم:

$$(x^2 + ax) + (y^2 + by) + c = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} \quad (۲۵/۵ \text{ نمره})$$

(۵/۵ نمره)

پس شعاع این دایره برابر $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$ است. (۲۵/۵ نمره)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۱)

پاسخ سؤال ۱۲: (۵/۱ نمره)

ابتدا شعاع و مرکز هر دو دایره را پیدا می کنیم:

$$x^2 + y^2 - 10x - 14y + 73 = 0 \Rightarrow \begin{cases} O = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (5, 7) \\ R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{100 + 196 - 292}}{2} = 1 \end{cases} \quad (۵/۵ \text{ نمره})$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} O' = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (2, 3) \\ R' = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{16 + 36 + 12}}{2} = 4 \end{cases} \quad (۵/۵ \text{ نمره})$$

اکنون طول خط المרכזین OO' را با جمع و تفریق شعاع ها مقایسه می کنیم:

$$OO' = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow OO' = R + R' \quad (۲۵/۵ \text{ نمره})$$

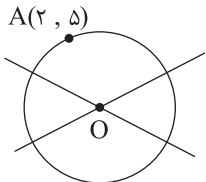
بنابراین دو دایره مماس خارجی هستند. پس سه مماس مشترک دارند. (۲۵/۵ نمره)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۴)



پاسخ سؤال ۱۳: (۱/۵ نمره)

نقطه تلاقی دو قطر مرکز دایره است.



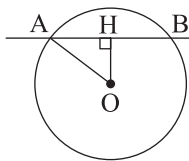
$$\begin{cases} y + 2x = 5 \\ y - x = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{کم}} 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow O(2, 1) \quad (\text{نمره } 0/75)$$

$$R = OA = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16 \quad (\text{نمره } 0/5)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۱۴۶)

پاسخ سؤال ۱۴: (۲ نمره)

با توجه به شکل $AH = \frac{AB}{2} = \sqrt{5}$ است.

$$3y - 4x + 6 = 0 \Rightarrow \text{فاصله مرکز } O \text{ تا خط } OH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|0 + 4 + 6|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{10}{5} = 2 \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$\Delta OAH : OA^2 = AH^2 + OH^2 = 5 + 4 = 9 \Rightarrow R = 3 \quad (\text{نمره } 0/5)$$

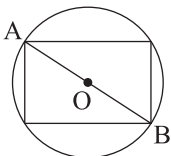
$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 9 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

اکنون نقاط برخورد دایره با محور x را پیدا می‌کنیم:

$$y = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 9 \quad (\text{نمره } 0/25) \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 3 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow M(2, 0) \\ x+1 = -3 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow N(-4, 0) \end{cases} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۱۴۳)

پاسخ سؤال ۱۵: (۱ نمره)

در صورتی که نقاط $A(2, 3)$ و $B(0, 1)$ دو رأس مقابل یک مستطیل باشند، آنگاه قطر دایره محیطی این مستطیل خواهد بود.پس O مرکز دایره محیطی وسط AB و شعاع آن $\frac{AB}{2}$ است. (نمره ۰/۲۵)

$$O = \frac{A+B}{2} = (1, 2), \quad R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{4+4}}{2} = \sqrt{2} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۱۴۶)

سرگروه	گروه طراحی و بازنگری (به ترتیب حروف الفبا)	ویراستاران (به ترتیب حروف الفبا)
حسن محمدبیگی	احمد رضا فلاح - حسن محمدبیگی - محمد تقی نمازی	مهرداد شریف - فاطمه فرجی

واحد فنی (به ترتیب حروف الفبا)
زهرا احدی - امیرعلی الماسی - مبینا بهرامی - معین الدین تقی زاده - پریا رحیمی - مهرداد شمسی - راضیه صالحی - انسیه مرزبان