



پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

(الف) نادرست (ب) درست (ج) درست (د) نادرست

توضیحات آموزشی:

(الف) تابع $f(2x)$ از انقباض افقی $f(x)$ به دست می آید. بنابراین طول نقاط نصف می شود و جواب درست $A'(1, 3)$ است.

(ب) به ازای $x = -1$ عبارت $x^6 - 1$ برابر صفر است پس $x^6 - 1$ بر $x + 1$ بخش پذیر است.

(ج) از قضیه پرتوان استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^7 + 2x^7 - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^7) = -\infty$$

(د) تابع را ساده می کنیم:

$$y = \frac{x(x+1)}{x^7} = \frac{x+1}{x^6} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x^6} = \pm\infty$$

پس $x = 0$ مجانب قائم است.

(حسابان دوازدهم، صفحه های ۱۰، ۲۲، ۵۵ و ۶۵)

پاسخ سؤال ۲: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

(الف) $[4, +\infty)$ (ب) ± 2 (ج) $+\infty$ (د) $y = 0$

توضیحات آموزشی:

(الف) تابع $\log x$ اکیداً صعودی است. پس:

$$\log(x+1) \leq \log(2x-3) \Rightarrow x+1 \leq 2x-3 \Rightarrow 4 \leq x$$

با این شرط، دو شرط دامنه یعنی $x+1 > 0$ و $2x-3 > 0$ هم برقرار است.

(ب) مقدار چندجمله ای به ازای $x = a$ برابر صفر است.

$$x^7 + ax - 1 = a^7 + a^7 - 1 = 2a^7 - 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$$

(ج) چون $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin^7 x}{x^7} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{x^7} + \frac{\sin^7 x}{x^7} \right) = +\infty + 1 = +\infty$$

(د)

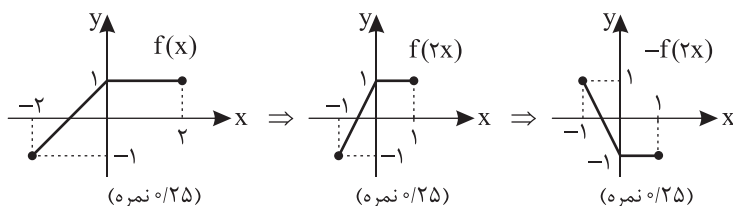
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^7-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^6} = 0$$

پس $y = 0$ مجانب افقی است.

(حسابان دوازدهم، صفحه های ۱۸، ۱۹، ۵۴ و ۶۸)

پاسخ سؤال ۳: (۱/۵ نمره)

به صورت مرحله ای نمودار تابع خواسته شده را رسم می کنیم:



دامنه تابع نهایی برابر $[-1, 1]$ (نمره ۲۵/۰) و برد آن برابر $[-1, 1]$ (نمره ۲۵/۰) است. در بازه $[0, 1]$ هم صعودی است و هم نزولی. (نمره ۲۵/۰)

توضیحات آموزشی: برای آنکه از $f(x-1)$ به $f(x)$ برسیم باید نمودار $f(x-1)$ را یک واحد به چپ انتقال دهیم و برای آنکه از $f(x)$ به $-f(2x)$ برسیم، باید طول نقاط را نصف و عرض نقاط را قرینه کنیم.

(حسابان دوازدهم، صفحه های ۸ و ۱۰)



پاسخ سؤال ۴: (۱ نمره)

$$f\left(\frac{x}{p}\right) \Rightarrow \text{طول نقاط در } ۲ \text{ ضرب (نمره } \frac{۲۵}{۱۰})$$

$$f\left(\frac{x-3}{p}\right) \Rightarrow ۳ \text{ واحد به راست (نمره } \frac{۲۵}{۱۰})$$

$$4f\left(\frac{x-3}{p}\right) \Rightarrow \text{عرض نقاط } ۴ \text{ برابر (نمره } \frac{۲۵}{۱۰})$$

$$4f\left(\frac{x-3}{p}\right) + ۲ \Rightarrow ۲ \text{ واحد به بالا (نمره } \frac{۲۵}{۱۰})$$

توضیحات آموزشی: اگر طول نقاط $f(x)$ را k برابر کنیم، تابع $f\left(\frac{x}{k}\right)$ به دست می آید. اگر $k > ۰$ باشد، نمودار $f(x-k)$ از انتقال افقی $f(x)$ به سمت راست به دست می آید.

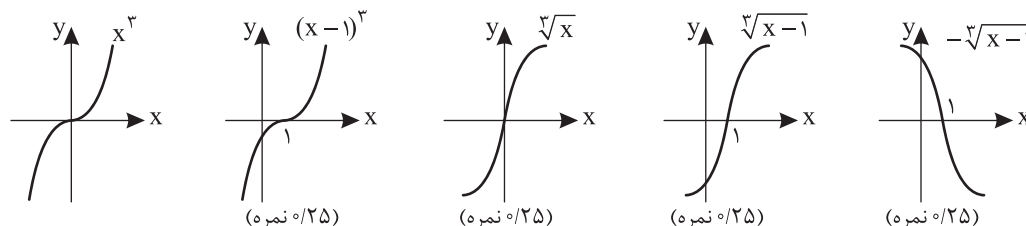
اگر عرض نقاط $f(x)$ را k برابر کنیم، تابع $kf(x)$ به دست می آید.

اگر $k > ۰$ باشد، نمودار $f(x) + k$ از انتقال عمودی $f(x)$ به سمت بالا به دست می آید.

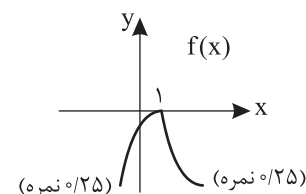
(حسابان دوازدهم، صفحه های ۷، ۳ و ۹)

پاسخ سؤال ۵: (۲ نمره)

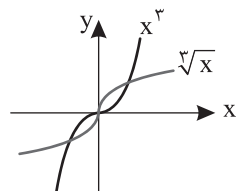
(الف)



(ب) در بازه $[۱, +\infty)$ صعودی (نمره $\frac{۲۵}{۱۰}$) و در بازه $[۱, +\infty)$ نزولی (نمره $\frac{۲۵}{۱۰}$) است.



توضیحات آموزشی: وارون تابع $y = x^3$ تابع $y = \sqrt[3]{x}$ است که نمودار آن به صورت زیر است:



(حسابان دوازدهم، صفحه های ۱۸ و ۲۱)

پاسخ سؤال ۶: (۱/۵ نمره)

$$f(2) = ۰ \Rightarrow ۸ - ۱۶ + 2a + 4 = ۰ \Rightarrow a = ۲ \text{ (نمره } \frac{۲۵}{۱۰})$$

$$x - a = x - 2 = ۰ \Rightarrow x = ۲ \text{ (نمره } \frac{۲۵}{۱۰})$$

$$R = f(2x - 3) = f(1) = 1 - 4 + a + 4 = ۳ \text{ (نمره } \frac{۲۵}{۱۰})$$

توضیحات آموزشی: باقیمانده تقسیم چندجمله ای $f(x)$ بر $ax + b$ برابر $f\left(-\frac{b}{a}\right)$ است.

(حسابان دوازدهم، صفحه های ۱۹ و ۲۲)



پاسخ سؤال ۷: (۱/۵ نمره)

$$\begin{cases} \max = 2 + |a| & (\text{نمره } 0.25) \\ \min = 2 - |a| & (\text{نمره } 0.25) \end{cases} \Rightarrow 2 + |a| = 2 - |a| + 6 \Rightarrow |a| = 3 \quad (\text{نمره } 0.25)$$

$$\text{ب) } T = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{a}\right|} = 2|a| = 6 \quad (\text{نمره } 0.25)$$

توضیحات آموزشی: در تابع $y = a \sin bx + c$ روابط زیر برقرار است:

$$\max = c + |a|$$

$$\min = c - |a|$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۲۷)

پاسخ سؤال ۸: (۲ نمره)

$$\begin{cases} \max = c + |a| = 2 & (\text{نمره } 0.25) \\ \min = c - |a| = -2 & (\text{نمره } 0.25) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 & (\text{نمره } 0.25) \\ |a| = 2 & (\text{نمره } 0.25) \end{cases} \xrightarrow{a < 0} a = -2 \quad (\text{نمره } 0.25)$$

$$T = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \left|\frac{2\pi}{b}\right| = \pi \Rightarrow |b| = 2 \quad (\text{نمره } 0.25) \Rightarrow b = \pm 2 \quad (\text{هر دو مقدار قابل قبول است})$$

$$f(x) = c + a \cos bx = -2 \cos(2x) \quad (\text{نمره } 0.25)$$

توضیحات آموزشی: فاصله افقی بین طول نقاط $\max$ و $\min$ متوالی برابر نصف دوره تناوب است.

در تابع $y = a \cos bx + c$ اگر $a > 0$ باشد، روی محور y ها ماکزیمم و اگر $a < 0$ باشد، روی محور y ها مینیمم داریم.

(حسابان دوازدهم، صفحه ۲۸)

پاسخ سؤال ۹: (۱/۵ نمره)

$$2 \sin^2 x - 9 \sin x - 5 = 0 \quad (\text{نمره } 0.25)$$

$$\sin x = t \Rightarrow 2t^2 - 9t - 5 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}, t = 5$$

$t = 5$ قابل قبول نیست.

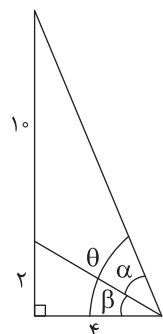
$$t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} & (\text{نمره } 0.25) \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} & (\text{نمره } 0.25) \end{cases} \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad (\text{نمره } 0.5)$$

توضیحات آموزشی: جوابهای معادله مثلثاتی $\sin x = \sin \alpha$ به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۴۰)

پاسخ سؤال ۱۰: (۱ نمره)



$$\tan \alpha = \tan(\theta - \beta) = \frac{\tan \theta - \tan \beta}{1 + \tan \theta \tan \beta} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}} = \frac{\frac{2}{4}}{1 + \frac{3}{16}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{19}{16}} = \frac{8}{19} \quad (\text{نمره } 0.25)$$

توضیحات آموزشی: روابط زیر برای تانژانت مجموع زوایا برقرار است:

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۴۳)



پاسخنامه آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۱۰/۹

پاسخنامه درس: حسابان

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

پاسخ سؤال ۱۱: (۱/۵ نمره)

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{\sin x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x] - 2}{x^2 - 4} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{4x^3 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{4x} = 0 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

توضیحات آموزشی: الف) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ آنگاهعلامت جواب از روی علامت f و g در همسایگی محذوف a به دست می آید.ب) قضیه پرتوان: اگر $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots$ و $g(x) = a'x^m + b'x^{m-1} + \dots$ دو چندجمله ای باشند، آنگاه:

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n}{a'x^m}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه های ۵۳ و ۵۴)

پاسخ سؤال ۱۲: (۲ نمره)

باید صورت عامل $x - 3$ داشته باشد که با مخرج ساده شود.

$$x^2 + ax + 3 = 0 \xrightarrow{x=3} 9 + 3a + 3 = 0 \Rightarrow a = -4 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x+1)(x-3)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x+1)(x-3)} = \frac{x-1}{x+1} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty \quad (\text{نمره } 0/25)$$

توضیحات آموزشی: اگر f و g دو چندجمله ای و تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ تا حد امکان ساده شده باشد، آنگاه ریشه های مخرج کسر، مجانب های قائم تابع $\frac{f}{g}$ است.

(حسابان دوازدهم، صفحه ۵۴)

پاسخ سؤال ۱۳: (۷۵/۰ نمره)

$$\text{مجاوب قائم: } x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\text{مجاوب افقی: } \lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{x - 2} = 2 \Rightarrow y = 2 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

نقطه $A(2, 3)$ (نمره ۰/۲۵) نقطه برخورد مجانب هاست.توضیحات آموزشی: در تابع $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ خط $x = -\frac{d}{c}$ مجانب قائم و خط $y = \frac{a}{c}$ مجانب افقی است.در واقع ریشه مخرج مجانب قائم و حاصل $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ مجانب افقی است.

پاسخ سؤال ۱۴: (۱/۲۵ نمره)

باید $x = 1$ ریشه مضاعف مخرج باشد. (نمره ۰/۲۵)

$$2x^2 + bx + c = 2(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2 \Rightarrow \begin{cases} b = -4 \\ c = 2 \end{cases} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

توضیحات آموزشی: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ یا $-\infty$ باشد، آنگاه $x = a$ ریشه مضاعف مخرج است.

به تفاوت دو مثال زیر توجه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x-1)(x+2)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x-1)^2} = +\infty$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۵۸)



باسمه تعالی

پاسخنامه آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۱۰/۹

پاسخنامه درس: حسابان

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

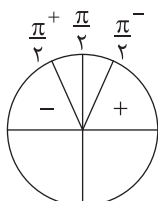
صفحه ۵ از ۵

پاسخ سؤال ۱۵: (۵/۰ نمره)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \quad (۵/۰ \text{ نمره})$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty \quad (۵/۰ \text{ نمره})$$

توضیحات آموزشی: مقدار $\tan \alpha$ وقتی α در ناحیه اول دایره مثلثاتی است، مثبت است و مقدار $\tan \alpha$ وقتی α در ناحیه دوم دایره مثلثاتی است، منفی است.



(حسابان دوازدهم، صفحه ۵۳)

سرگروه	گروه طراحی و بازنگری (به ترتیب حروف الفبا)	ویراستاران
حسین شفیع زاده	حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان ماهان متش - علی اصغر ناری	ابوالفضل فروغی - محمد منتظران

واحد فنی (به ترتیب حروف الفبا)		
زهرا احدی - امیرعلی الماسی - مبینا بهرامی - معین الدین تقی زاده - پریا رحیمی - مهرداد شمسی - راضیه صالحی - انسیه مرزبان		