



پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

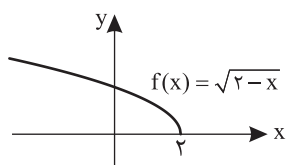
الف) درست (۲۵/۰ نمره)

تابع $f(x) = \sqrt{2-x}$ در دامنه‌اش یعنی بازه $(-\infty, 2]$ اکیداً نزولی است.

ب) درست (۲۵/۰ نمره)

ج) نادرست (۲۵/۰ نمره)

د) نادرست (۲۵/۰ نمره)

تابع f مجانب افقی ندارد.

$$f(x) = \pi \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 4 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x^2 - x}{3x + 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x = \pm\infty$$

پاسخ سؤال ۲: (هر مورد ۵/۰ نمره)

الف) $y = f(kx)$ ب) در ناحیه دوم $\tan x$ منفی است و بازه تغییرات آن $(-\infty, 0)$ است.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{2 + (-3)}{1 - (-6)} = -\frac{1}{7} \quad \text{ج)}$$

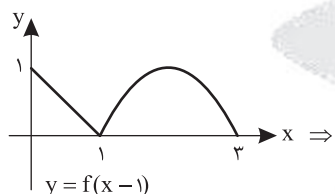
د) مجانب قائم $x = -3$. $f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+3)}$ پس این تابع فقط یک مجانب قائم دارد.به طور کلی: الف) $f(kx)$ ، ب) $(-\infty, 0)$ ، ج) $-\frac{1}{7}$ ، د) یک

(حسابان دوازدهم، صفحه‌های ۹، ۴۲، ۳۰ و ۵۶)

پاسخ سؤال ۳: (۵/۱ نمره)

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x-1} f(x-1) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{x}{2}} f\left(\frac{x}{2}-1\right) \xrightarrow{x \rightarrow 2} 2f\left(\frac{x}{2}-1\right)$$

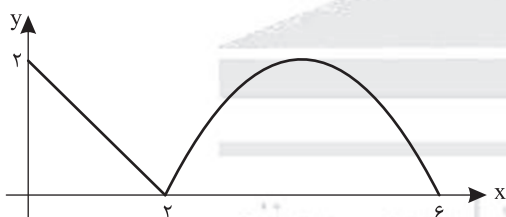
یک واحد به راست دامنه $x \rightarrow \frac{x}{2}$ بر ۱/۲ برد دو برابر



(۲۵/۰ نمره)



(۵/۱ نمره)



(۲۵/۰ نمره)

دامنه تابع نهایی بازه $[0, 6]$ و برد آن بازه $[0, 2]$ می‌باشد. (۵/۱ نمره)

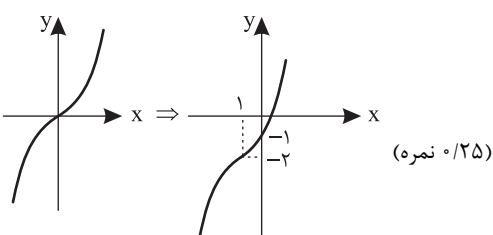
(حسابان دوازدهم، صفحه ۱۲)

پاسخ سؤال ۴: (۲۵/۱ نمره)

$$y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 2 \Rightarrow y = (x+1)^3 - 2 \quad \text{(۲۵/۰ نمره)}$$

$$y = x^3 \xrightarrow{x \rightarrow x+1} y = (x+1)^3 \xrightarrow{-2} y = (x+1)^3 - 2$$

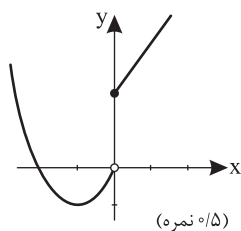
یک واحد انتقال به چپ دو واحد انتقال به پایین (۲۵/۰ نمره)



(۲۵/۰ نمره)

با توجه به نمودار، تابع رسم شده اکیداً صعودی است. (۲۵/۰ نمره)

(حسابان دوازدهم، صفحه ۱۴)

اکیداً نزولی: $(-\infty, -1)$ (نمره ۰/۵)اکیداً صعودی: $(-1, +\infty)$ (نمره ۰/۵)

(۰/۵ نمره)

(حسابان دوازدهم، صفحه ۱۸)

پاسخ سؤال ۵: (۱/۵ نمره)

پاسخ سؤال ۶: (۲ نمره)

الف) چون $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x-2$ و $x+1$ بخش پذیر است، داریم:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow p(2)=0 \quad (نمره ۰/۲۵) \Rightarrow 8 + 4a + 2b + 1 = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -9 \quad (نمره ۰/۲۵)$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow p(-1)=0 \quad (نمره ۰/۲۵) \Rightarrow -1 + a - b + 1 = 0 \Rightarrow a = b \quad (نمره ۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow 4a + 2a = -9 \Rightarrow 6a = -9 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}, b = -\frac{3}{2} \quad (نمره ۰/۵)$$

(ب)

$$x^6 - 1 = (x+1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1) \quad (نمره ۰/۵)$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۲۲)

پاسخ سؤال ۷: (۱/۲۵ نمره)

$$y = -\pi \cos\left(\frac{1}{3}x\right) - 3\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi \quad (نمره ۰/۲۵)$$

$$\max = |-\pi| - 3\pi \quad (نمره ۰/۲۵) \Rightarrow \pi - 3\pi = -2\pi \quad (نمره ۰/۲۵)$$

$$\min = -|-\pi| - 3\pi \quad (نمره ۰/۲۵) \Rightarrow -\pi - 3\pi = -4\pi \quad (نمره ۰/۲۵)$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۲۷)

پاسخ سؤال ۸: (۱ نمره)

ضابطه تابع به صورت $y = a \cos(bx) + c$ است که در آن، a منفی است. نصف دوره تناوب برابر ۴ است؛ پس:

$$\frac{1}{2}T = 4 \Rightarrow T = 8 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 8 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{\pi}{4} \quad (نمره ۰/۲۵)$$

ماکزیمم تابع برابر ۱ و مینیمم آن برابر -۳ است.

$$\begin{cases} |a| + c = 1 \\ -|a| + c = -3 \end{cases} \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow c = -1 \quad (نمره ۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow |a| - 1 = 1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = -2 \quad (نمره ۰/۲۵)$$

$$y = -2 \cos\left(\pm \frac{\pi}{4}x\right) - 1 \Rightarrow y = -2 \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) - 1 \quad (نمره ۰/۲۵)$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۳۴)

پاسخ سؤال ۹: (۱/۲۵ نمره)

با استفاده از فرمول $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ داریم:

$$\cos 2x + 3 \sin x = 2 \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x + 3 \sin x = 2 \quad (نمره ۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0 \quad (نمره ۰/۲۵) \Rightarrow (\sin x - 1)(2\sin x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = 1, \sin x = \frac{1}{2}$$

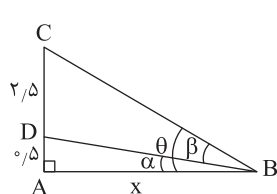
$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (نمره ۰/۲۵)$$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} & (نمره ۰/۲۵) \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} & (نمره ۰/۲۵) \end{cases}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۳۴)



پاسخ سؤال ۱۰: (۱ نمره)



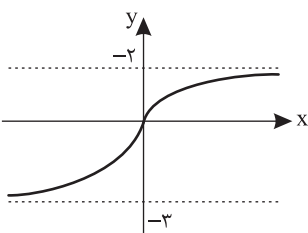
$$\triangle ABD: \tan \alpha = \frac{2/5}{x} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\triangle ABC: \tan \theta = \frac{2}{x} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\tan \beta = \tan(\theta - \alpha) = \frac{\tan \theta - \tan \alpha}{1 + \tan \theta \tan \alpha} = \frac{\frac{2}{x} - \frac{2/5}{x}}{1 + \frac{2}{x} \cdot \frac{2/5}{x}} = \frac{\frac{2 - 0/5}{x}}{\frac{x^2 + 2/5}{x^2}} \Rightarrow \tan \beta = \frac{2/5 x}{x^2 + 1/5} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۴۳)

پاسخ سؤال ۱۱: (۵/۰ نمره)



(حسابان دوازدهم، صفحه ۶۹)

پاسخ سؤال ۱۲: (هر مورد ۵/۰ نمره)

$$\text{الف) } = \frac{[2^-] - 2}{0^-} = \frac{1 - 2}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\text{ب) } = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x(x+2)}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x}{x+2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\text{ج) } = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2}{6x^2} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{د) } = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^4) = -3(+\infty) = -\infty$$

(حسابان دوازدهم، صفحه‌های ۵۱، ۵۵، ۶۶ و ۶۹)

پاسخ سؤال ۱۳: (۱ نمره)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2ax + [x]}{1 - x^2} = \frac{2a + 1}{0^-} = -\infty \Rightarrow 2a + 1 > 0 \Rightarrow a > -\frac{1}{2} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2ax + [x]}{1 - x^2} = \frac{2a + 0}{0^+} = -\infty \Rightarrow 2a < 0 \Rightarrow a < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < a < 0 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(حسابان دوازدهم، صفحه‌های ۵۵ و ۵۸)

پاسخ سؤال ۱۴: (۵/۱ نمره)

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-2)} = \frac{x+1}{x-2} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \text{مجاانب قائم} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{3^+}{0^+} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{3^-}{0^-} = -\infty \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow y = 1 \quad \text{مجاانب افقی} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

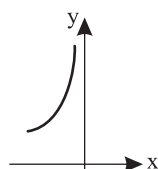
دقت کنید $x = -1$ نمی‌تواند مجانب قائم باشد چون $-\infty$ یا $+\infty$ (نمره ۰/۲۵).

(حسابان دوازدهم، صفحه ۶۹)

پاسخ سؤال ۱۵: (۲۵/۱ نمره)

$$x - |x| = 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [0, +\infty) \Rightarrow D_f = (-\infty, 0) \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{x-|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{x-(-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{2x} = \frac{0-2}{2 \cdot 0^-} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \quad (\text{نمره } 0/25)$$

تابع در همسایگی چپ $x = 0$ تعریف شده و داریم:نمودار تابع در مجاورت $x = 0$ (مجاانب قائم) به صورت زیر است:

(نمره ۰/۲۵)

(حسابان دوازدهم، صفحه ۵۸)