



پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

الف) نادرست، اکیداً صعودی بدون $f - g$ معلوم نیست.ب) نادرست، مقدار $\tan \alpha$ منفی تر است پس $\tan \alpha < \sin \alpha$.ج) درست، دامنه باید $\frac{1}{k}$ برابر شود و چون $k < 0$: $(\frac{b}{k}, \frac{a}{k}) \rightarrow (\frac{a}{k}, \frac{b}{k})$ د) نادرست، $f(x) = \frac{1}{x-|x|} = \frac{1}{2x}$, $x < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ این تابع در $x > 0$ تعریف نمی شود. شکل f اطراف $x = 0$:

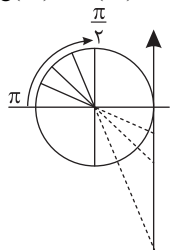
(حسابان دوازدهم، صفحه های ۱۰، ۲۲، ۳۴، و ۵۸)

پاسخ سؤال ۲: (هر مورد ۵/۰ نمره)

الف) $A'(-6, 7)$ (۵/۰ نمره)

$$f(-2) = 5, g(x) = 2f(\frac{1}{2}x) - 3 \Rightarrow \frac{1}{2}x = -2 \Rightarrow x = -4$$

$$g(-6) = 2f(-2) - 3 = 2 \times 5 - 3 = 7 \Rightarrow g(-6) = 7$$

ب) $m \geq 2$ (۵/۰ نمره)طبق دایره مثلثاتی زیر، در $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ ، مقدار $\tan \alpha$ کوچک تر مساوی صفر است.

$$\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi \Rightarrow \tan \alpha \leq 0 \Rightarrow 4 - 2m \leq 0$$

$$\Rightarrow 2m \geq 4 \Rightarrow m \geq 2$$

ج) $D_f = \mathbb{R} - \{x \mid x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\}$ (۵/۰ نمره)

$$f(x) = \tan(\frac{x}{2}) \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq 2k\pi + \pi$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{x \mid x = 2k\pi + \pi\}$$

د) $m = -6$ (۵/۰ نمره)

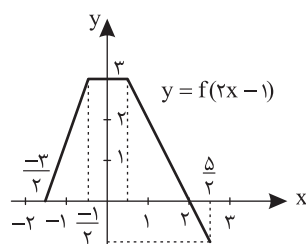
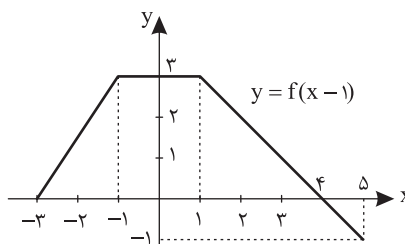
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{mx^2 - 4x}{2x^2 - 9} = \frac{m}{2} = -3 \Rightarrow m = -6$$

پاسخ سؤال ۳: (۱/۵ نمره)

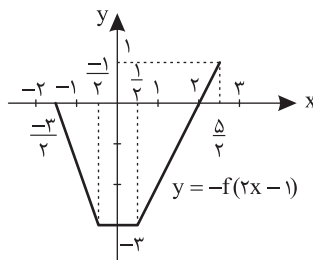
طبق تبدیل های زیر، نمودار $y = -f(2x-1)$ از روی نمودار $y = f(x)$ رسم می شود.

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} y = f(x-1) \xrightarrow{\text{طول نقاط تقسیم بر ۲}} y = f(2x-1)$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x ها}} y = -f(2x-1)$$



رسم نمودار (۱ نمره)

دامنه $[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ (نمره ۲۵/۰)بردار $[-3, 1]$ (نمره ۲۵/۰)

(حسابان دوازدهم، صفحه ۱۲)

پاسخ سؤال ۴: (۱/۵ نمره)

دامنه تابع $y = f(x)$ به صورت $D_f = [-4, 3]$ است، یعنی $-4 \leq x < 3$ ، پس در تابع $g(x) = 2f(x+3) - 6$ باید $x+3$ در بازه $[-4, 3]$ قرار داشته باشد یعنی:

$$-4 \leq x+3 < 3 \Rightarrow -7 \leq x < 0 \Rightarrow D_g = [-7, 0)$$
 (نمره ۲۵/۰)



برد تابع $y = f(x)$ بازه $R_f = (2, 8]$ است، یعنی $2 < f(x) \leq 8$ ، پس در تابع g داریم:

$$2 < f(x+3) \leq 8 \quad (25 \text{ نمره}) \quad \xrightarrow{x+3} 4 < 2f(x+3) \leq 16 \quad (25 \text{ نمره})$$

$$\xrightarrow{-6} -2 < 2f(x+3) - 6 \leq 10 \quad (25 \text{ نمره})$$

$$\Rightarrow -2 < g(x) \leq 10 \Rightarrow R_g = (-2, 10] \quad (25 \text{ نمره})$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۱۰)

پاسخ سؤال ۵: (۱/۵ نمره)

الف) فرض می‌کنیم $a \geq b$ نباشد، یعنی $a < b$ (۲۵ نمره) و چون f اکیداً نزولی است، داریم:

$$a < b \Rightarrow f(a) > f(b) \quad (25 \text{ نمره})$$

نتیجه فوق، خلاف فرض است، زیرا $f(a) \leq f(b)$ پس باید $a \geq b$ باشد. (۲۵ نمره)

ب) با توجه به اینکه تابع $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ اکیداً نزولی است، داریم:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-2} \leq \frac{1}{243} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{4x-2} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^5 \Rightarrow 4x-2 \geq 5 \quad (25 \text{ نمره})$$

$$\Rightarrow 4x \geq 7 \Rightarrow x \geq \frac{7}{4} \quad (5 \text{ نمره})$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۲۲)

پاسخ سؤال ۶: (۱/۵ نمره)

$$\begin{aligned} f(1) = 0 &\Rightarrow 2 - a + 3 + b = 0 \Rightarrow \begin{cases} -a + b = -5 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow 2b = -4 \Rightarrow b = -2, a = 3 \\ f(-1) = 0 &\Rightarrow 2 + a - 3 + b = 0 \Rightarrow \begin{cases} -a + b = -5 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow 2b = -4 \Rightarrow b = -2, a = 3 \end{aligned}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۲۲)

پاسخ سؤال ۷: (۰/۷۵ نمره)

$$f(x) = a \sin bx + c \Rightarrow \begin{cases} \max = |a| + c \\ \min = -|a| + c \\ T = \frac{2\pi}{|b|} \quad (25 \text{ نمره}) \end{cases}$$

$$f(x) = -2 \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) + \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} \max = 2 + \sqrt{3} \quad (25 \text{ نمره}) \\ \min = -2 + \sqrt{3} \quad (25 \text{ نمره}) \\ T = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{4}|} = 8 \end{cases}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۳۳)

پاسخ سؤال ۸: (۱/۵ نمره)

$$\begin{cases} \max = 4 \\ \min = 1 \\ T = \pi \Rightarrow T = 4\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| + c = 4 \\ -|a| + c = 1 \\ + 2c = 5 \Rightarrow c = \frac{5}{2} \end{cases} \quad (25 \text{ نمره})$$

$$\Rightarrow |a| = \frac{3}{2} \quad (25 \text{ نمره})$$

$$T = 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \quad (25 \text{ نمره})$$

چون تابع بعد از $x = 0$ نزولی است، نمودار شبیه $-\sin x$ می‌باشد یعنی $ab < 0$ اگر $a = \frac{3}{2}$ آنگاه $b = -\frac{1}{2}$ و اگر $a = -\frac{3}{2}$ آنگاه $b = \frac{1}{2}$:

$$y = -\frac{3}{2} \sin \frac{x}{2} + \frac{5}{2} \quad \text{یا} \quad y = \frac{3}{2} \sin\left(-\frac{x}{2}\right) + \frac{5}{2} \quad (75 \text{ نمره})$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۳۴)

پاسخ سؤال ۹: (۱/۵ نمره)

$$\cos 3x = 1 - 2 \sin^2 x = \cos 2x$$

$$\cos 3x = \cos 2x \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm 2x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 3x = 2k\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} \end{cases}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۴۴)



پاسخ سؤال ۱۰: (۱ نمره)

$$\cot \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tan \alpha = -2 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$\tan(\beta - \alpha) = 3 \Rightarrow \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} = 3 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan \beta + 2}{1 - 2 \tan \beta} = 3 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵) \Rightarrow \tan \beta + 2 = 3 - 6 \tan \beta$$

$$\Rightarrow 7 \tan \beta = 1 \Rightarrow \tan \beta = \frac{1}{7} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۴۲)

پاسخ سؤال ۱۱: (۱/۷۵ نمره)

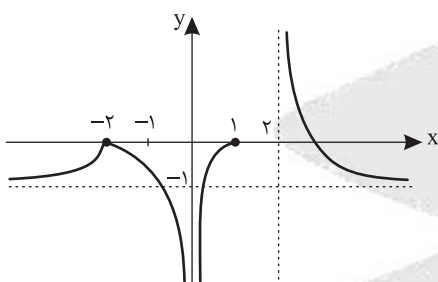
$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{[x-2]}{\cos x} = \frac{[\frac{\pi}{2}-2]}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3 + x - 1}{3x^3 + x^2 + 1} - \frac{3}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3}{3x^3} - 0 \right) = \frac{2}{3} \quad (\text{نمره } ۰/۷۵)$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 + x^2 + \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3) = -\infty \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

پاسخ سؤال ۱۲: (۱ نمره)

نمودار تابع f می تواند به صورت زیر باشد:



توجه کنید که می توان بی شمار نمودار با شرایط گفته شده رسم کرد.

(حسابان دوازدهم، صفحه ۶۹)

پاسخ سؤال ۱۳: (۲ نمره)

مجاانب های قائم ریشه های مخرج هستند:

$$|2x - 3| - 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2x - 3 = 7 \Rightarrow x = -5 \\ 2x - 3 = -7 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 5x}{2x} = 3 \Rightarrow y = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 5x}{-2x} = -2 \Rightarrow y = -2$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۶۹)

پاسخ سؤال ۱۴: (۱/۵ نمره)

از آنجا که هم در همسایگی چپ و هم در همسایگی راست مجانب قائم، تابع به $+\infty$ رفته است، پس $x = 1$ ریشه مضاعف مخرج است. (نمره ۰/۵) یعنی:

$$x^2 + ax + b = 0 \xrightarrow{\text{ریشه مضاعف ۱ دارد}} \begin{cases} x = 1: 1 + a + b = 0 \\ \Delta_{\text{مخرج}} = 0 \Rightarrow a^2 - 4b = 0 \end{cases} \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

$$\Rightarrow a = -2, b = 1 \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۵۸)