



پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

(د) درست

(ج) درست

(ب) نادرست

(الف) نادرست

(بیان ذکر درستی یا نادرستی عبارت‌ها لازم نیست، برای یادگیری بیشتر اینجا آورده شده است.)

(الف) نادرست است، زیرا اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ آنگاه $|AB| = -2$ ولی ماتریس‌های A و B وارون‌پذیر نیستند چون مربعی نیستند.

(ب) نادرست است، زیرا ماتریس صفر غیرمربعی اسکالر نیست.

(ج) درست است، زیرا $A^2 = A$ آنگاه $A^2 = A \times A = A^2 \times A = A \times A = A^2 = A$ به همین ترتیب $A^{15} = A$.

(د) درست است، زیرا $m = 2 \Rightarrow m - 2 = 0$ و $m = n = 2$ پس $n - m = 0$.

(هندسه دوازدهم، صفحه‌های ۱۲، ۲۰ و ۲۳)

پاسخ سؤال ۲: (۷۵/۰ نمره)

ابتدا ماتریس A^T را پیدا می‌کنیم:

$$A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

$$A^{14} = (A^T)^4 = I^4 = I$$

$$A^{14} + 2I = I + 2I = 3I = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

پس مجموع درایه‌های این ماتریس برابر ۶ است. (۲۵/۰ نمره)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۰)

پاسخ سؤال ۳: (۲۵/۱ نمره)

ابتدا دترمینان ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} |A| & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & |A| & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{بر حسب ستون اول}} |A| = |A|(-1)^2(2 - |A|) \Rightarrow |A| = 2|A| - |A|^2$$

(۵/۰ نمره)

$$\Rightarrow |A|^2 - |A| = 0 \Rightarrow |A|(|A| - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \\ |A| = 1 \end{cases} \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

اگر $|A| = 0$ آنگاه $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ در نتیجه $|B| = 0$ پس B وارون‌پذیر نیست. (۲۵/۰ نمره)

اگر $|A| = 1$ آنگاه $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ در نتیجه:

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

(هندسه دوازدهم، صفحه‌های ۲۸، ۳۰ و ۳۱)

پاسخ سؤال ۴: (۱ نمره)

دستگاه را به صورت $AX = B$ می‌نویسیم که در آن:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (۵/۰ \text{ نمره})$$

بنابراین:

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \quad (۵/۰ \text{ نمره})$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۵)



پاسخ سؤال ۵: (۱ نمره)

از طرفین تساوی ماتریس داده شده دترمینان می گیریم:

$$|4A| = \begin{vmatrix} \sqrt{2}|A|+1 & |A| \\ -15 & \sqrt{2}|A|-1 \end{vmatrix} \Rightarrow 16|A| = 2|A|^2 - 1 + 15|A| \Rightarrow 2|A|^2 - |A| - 1 = 0$$

(نمره ۰/۲۵)

$$\Rightarrow \begin{cases} |A| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = 1 & (\text{نمره } ۰/۲۵) \\ |A| = -\frac{1}{2} \Rightarrow |A^{-1}| = -2 & (\text{نمره } ۰/۲۵) \end{cases}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه های ۳۰ و ۳۱)

پاسخ سؤال ۶: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

(د) 6π

(ج) سهمی

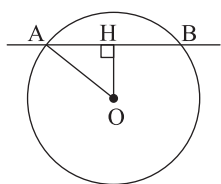
(ب) ۲۲

(الف) دو خط متقاطع

(هندسه دوازدهم، صفحه های ۳۵، ۳۹، ۴۱ و ۵۱)

پاسخ سؤال ۷: (۱ نمره)

ابتدا فاصله OH و سپس شعاع دایره را پیدا می کنیم.



$$OH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-1 + 1 - 4|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$AB = 2\sqrt{2} \Rightarrow AH = \sqrt{2} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$OA^2 = AH^2 + OH^2 = 2 + 8 = 10 \Rightarrow OA = \sqrt{10} = R \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

بنابراین معادله دایره به صورت زیر است:

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 10 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۳)

پاسخ سؤال ۸: (۱ نمره)

می دانیم دو دایره مماس داخل هستند هرگاه $OO' = |R - R'|$ باشد.

$$x^2 + y^2 - 4y + c = 0 \Rightarrow O = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (0, 2), R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{16 - 4c}}{2} = \sqrt{4 - c} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0 \Rightarrow O' = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (-1, 1), R' = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{4 + 4}}{2} = \sqrt{2} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$OO' = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

بنابراین:

$$OO' = |R - R'| \Rightarrow \sqrt{2} = |\sqrt{4 - c} - \sqrt{2}| \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2} = \sqrt{4 - c} - \sqrt{2} \Rightarrow c = -4 \\ -\sqrt{2} = \sqrt{4 - c} - \sqrt{2} \Rightarrow c = 4 \end{cases} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

مسلماً $c = 4$ قابل قبول نیست، زیرا به ازای آن $R = 0$ می شود، پس $c = -4$ قابل قبول است. (نمره ۰/۲۵)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۴)

پاسخ سؤال ۹: (۱ نمره)

فاصله مرکز دایره از خط را با شعاع دایره مقایسه می کنیم:

$$2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y = 4 \xrightarrow{+2} x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$$

$$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (1, -1), R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{4 + 4 + 8}}{2} = 2$$

(نمره ۰/۲۵)

$$\text{فاصله } O \text{ تا خط} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 + 4 + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{8}{5} = 1.6 < 2 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

چون فاصله مرکز O تا خط برابر شعاع دایره است، پس خط بر دایره مماس است. (نمره ۰/۲۵)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۵)



پاسخ سؤال ۱۰: (۱/۵ نمره)

$$\left. \begin{array}{l} A \Rightarrow AF + AF' = 2a \\ B \Rightarrow BF + BF' = 2a \end{array} \right\} \Rightarrow AF + AF' = BF + BF' \xrightarrow{AF' = BF} AF = BF' \quad (۱/۵ \text{ نمره})$$

بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} AF' = BF \\ AF = BF' \\ FF' = FF' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \triangle AFF' \cong \triangle BFF' \xrightarrow{\text{(۲۵/۰ نمره)}} \triangle AFF' = \triangle BFF' \Rightarrow MF = MF' \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۵۷)

پاسخ سؤال ۱۱: (۵/۰ نمره)

بنابر فرض مسئله داریم:

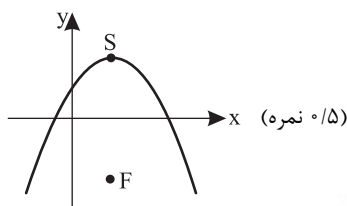
$$2b = 20 \Rightarrow b = 10, c = 6$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = 10^2 + 6^2 = 136 \Rightarrow a = 2\sqrt{34} \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{6}{2\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}} \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۹)

پاسخ سؤال ۱۲: (۱ نمره)

با توجه به جایگاه رأس و کانون سهمی مشخص می شود سهمی قائم رو به پایین است و $a = SF = 4$.

$$(x - \alpha)^2 = -4a(y - \beta) \Rightarrow (x - 1)^2 = -16(y - 2) \quad (۵/۰ \text{ نمره})$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۵۸)

پاسخ سؤال ۱۳: (۱ نمره)

در دیش مخابراتی بین شعاع قاعده R و عمق h و فاصله کانونی a رابطه زیر برقرار است.در این سؤال $2R = 160$ پس $R = 80$ و $h = \frac{64}{3}$ بنابراین:

$$a = \frac{R^2}{4h} \Rightarrow a = \frac{80 \times 80}{4 \times \frac{64}{3}} = 75 \quad (۵/۰ \text{ نمره})$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۵۹)

پاسخ سؤال ۱۴: (۱ نمره)

نقطه A روی صفحه YOZ قرار دارد، پس $x_A = 0$ پس $A = (0, -2, 3)$ اگر M وسط پاره خط AB باشد، داریم:

$$M = \frac{A+B}{2} = \left(-\frac{5}{2}, -3, 1\right) \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

چون $x_M < 0$ و $y_M < 0$ و $z_M > 0$ ، پس نقطه M در ناحیه سوم دستگاه مختصات فضایی قرار دارد. (۵/۰ نمره)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۶۴)

پاسخ سؤال ۱۵: (هر مورد ۷۵/۰ نمره)

$$\text{الف) } \vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \vec{b} \Rightarrow \vec{a}' = \frac{2+0-1}{\sqrt{4+1}} (2, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{5}} (2, 0, 1) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad (۵/۰ \text{ نمره})$$

$$\vec{a}' \cdot \vec{c} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot (1, -1, -2) = \frac{2}{\sqrt{5}} + 0 - \frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

$$\text{ب) } \left. \begin{array}{l} \vec{a} + \vec{b} = (3, 2, 0) \\ 2\vec{b} + \vec{c} = (5, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos \theta = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{a} + \vec{b}| |2\vec{b} + \vec{c}|} = \frac{15 - 2 + 0}{\sqrt{9+4} \sqrt{25+1}}$$

$$= \frac{13}{\sqrt{13} \sqrt{26}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45^\circ \quad (۷۵/۰ \text{ نمره})$$

(هندسه دوازدهم، صفحه های ۷۸ و ۸۰)



پاسخ سؤال ۱۶: (هر مورد ۱ نمره)

الف) حاصل ضرب خارجی دو بردار $\vec{a} - \vec{c}$ و $\vec{b}$ در راستای بردار عمود بر $\vec{a} - \vec{c}$ و $\vec{b}$ است. (۲/۵ نمره)

$$\vec{a} - \vec{c} = (-1, -1, 2), \vec{b} = (1, 0, -1) \quad (۲/۵ \text{ نمره})$$

$$(\vec{a} - \vec{c}) \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \quad (۵/۵ \text{ نمره})$$

ب)

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} \quad (۵/۵ \text{ نمره})$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (1, -2, 2) \cdot (-1, -2, -1) = -1 + 4 - 2 = 1 \quad (۲/۵ \text{ نمره})$$

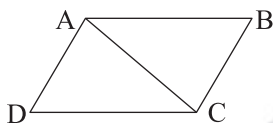
پس:

$$\text{حجم متوازی السطوح} = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = 1 \quad (۲/۵ \text{ نمره})$$

(هندسه دوازدهم، صفحه های ۸۱ و ۸۳)

پاسخ سؤال ۱۷: (۱/۵ نمره)

دو برابر مساحت مثلث ADC برابر مساحت متوازی الاضلاع ABCD است. پس:



$$\vec{AD} = D - A = (-3, 2, -3) \quad (۲/۵ \text{ نمره})$$

$$\vec{AC} = C - A = (1, 2, 1) \quad (۲/۵ \text{ نمره})$$

$$\vec{AD} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8\vec{i} - 8\vec{k} \quad (۵/۵ \text{ نمره})$$

$$S_{ABCD} = 2S_{ADC} = |\vec{AD} \times \vec{AC}| = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2} \quad (۵/۵ \text{ نمره})$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۸۱)

پاسخ سؤال ۱۸: (۱ نمره)

اثبات:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0 \end{cases} \rightarrow \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ یا } \theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \quad (۲/۵ \text{ نمره})$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۸۲)

مرکز سنجش آموزش مدارس برتر