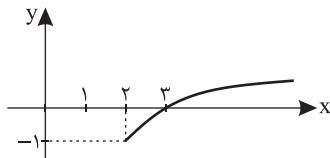




گروه طراحی و بازنگری: سعید اکبرزاده

پاسخ سؤال ۱:

(الف)



(۵/۰ نمره)

(ب)

$$x + [y] = 4/5$$

$$x = 0/5 \Rightarrow 0/5 + [y] = 4/5 \Rightarrow [y] = 4 \Rightarrow 4 \leq y < 5 \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

برای $x = 0/5$ بی شمار y وجود دارد، پس تابع نیست. (۲۵/۰ نمره)

پاسخ سؤال ۲:

دامنه f و g را محاسبه می کنیم:

$$f(x) = \sqrt{-x-1} \Rightarrow -x-1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \Rightarrow D_f = (-\infty, -1] \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

$$g(x) = \sqrt{x+2} - 4 \Rightarrow x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow D_g = [-2, +\infty)$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{-x-1} = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x \mid f(x) = 0\} \quad (۲۵/۰ \text{ نمره}) = [-2, -1] - \{-1\} = [-2, -1) \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [-2, +\infty) \mid g(x) \in (-\infty, -1]\} \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

$$D_{f \circ g} = \{x \geq -2 \mid g(x) \leq -1\} \Rightarrow g(x) = \sqrt{x+2} - 4 \leq -1 \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+2} \leq 3 \Rightarrow x+2 \leq 9 \Rightarrow x \leq 7$$

$$D_{f \circ g} = \{x \geq -2 \mid x \leq 7\} = [-2, 7] \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

پاسخ سؤال ۳:

(الف)

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}, x \leq 0 \Rightarrow y = \frac{x^2-1}{x^2+3} \Rightarrow x^2-1 = yx^2+3y$$

$$\Rightarrow x^2 - yx^2 = 3y + 1 \Rightarrow x^2(1-y) = 3y + 1 \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{3y+1}{1-y} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{3y+1}{1-y}} \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{\frac{3y+1}{1-y}} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{3x+1}{1-x}} \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

(ب)

$$f = \{(4, 2), (-1, 7)\}, g(x) = \sqrt{x+2} - 3$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(2) = g^{-1}(f^{-1}(2))$$

چون $f(4) = 2$ ، پس $f^{-1}(2) = 4$ و داریم:

$$g^{-1}(f^{-1}(2)) = g^{-1}(4) = k \xrightarrow{(۲۵/۰ \text{ نمره})} g(k) = 4 \Rightarrow \sqrt{k+2} - 3 = 4 \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

$$\Rightarrow \sqrt{k+2} = 7 \Rightarrow k+2 = 49 \Rightarrow k = 47 \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

پاسخ سؤال ۴:

با توجه به نمودار تابع نمایی، پایه عددی بزرگتر از یک است.

$$m^2 - 4 > 1 \Rightarrow m^2 > 5 \Rightarrow |m| > \sqrt{5} \Rightarrow m < -\sqrt{5} \quad \text{یا} \quad m > \sqrt{5} \quad (۵/۰ \text{ نمره})$$



پاسخ سؤال ۵:

الف) پایه‌ها را در دو طرف نامعادله یکسان می‌کنیم.

$$(\frac{1}{7})^{x-1} > (\frac{1}{7})^{-x} \times (\frac{1}{7})^{-2} \Rightarrow (\frac{1}{7})^{x-1} > (\frac{1}{7})^{-x-2} \quad (\text{نمره } \frac{1}{25})$$

$$0 < \frac{1}{7} < 1 \Rightarrow x-1 < -x-2 \Rightarrow 2x < -1 \Rightarrow x < -\frac{1}{2} \quad (\text{نمره } \frac{1}{25})$$

(ب)

$$\log(3x-2) - 2 = \frac{1}{2} \log(x+2) - \log 5$$

$$\log(3x-2) - \log 10^2 = \log \sqrt{x+2} - \log 5 \Rightarrow \log\left(\frac{3x-2}{100}\right) = \log\left(\frac{\sqrt{x+2}}{5}\right) \quad (\text{نمره } \frac{1}{25})$$

$$\Rightarrow \frac{3x-2}{100} = \frac{\sqrt{x+2}}{5} \Rightarrow 3x-2 = 2\sqrt{x+2} \xrightarrow{\text{توان } 2} (3x-2)^2 = 4(x+2) \quad (\text{نمره } \frac{1}{25})$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 12x + 4 = 4x + 8 \Rightarrow 9x^2 - 16x - 4 = 0, \Delta = 400$$

$$x = \frac{16 \pm 20}{18} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ (نمره } \frac{1}{25}) \\ x = -\frac{2}{9} \text{ غلط (نمره } \frac{1}{25}) \end{cases}$$

پاسخ سؤال ۶:

الف)

$$\log_8 125 \times \log_{\sqrt{5}} 256 + 3^{\log_3 25} = \log_{7^{\frac{1}{2}}} 5^7 \times \log_{\frac{1}{5^{\frac{1}{2}}}} 2^8 + 25^{\log_3 3}$$

$$= 3 \times \frac{1}{3} (\log_7 5) \times 8 \times 2 \log_5 2 + 25^{\log_3 3} \quad (\text{نمره } \frac{1}{25}) = 16 \log_7 5 \times \log_5 2 + 25^1 \quad (\text{نمره } \frac{1}{25})$$

$$= 16 + \sqrt{25} \quad (\text{نمره } \frac{1}{25}) = 16 + 5 = 21 \quad (\text{نمره } \frac{1}{25})$$

(ب)

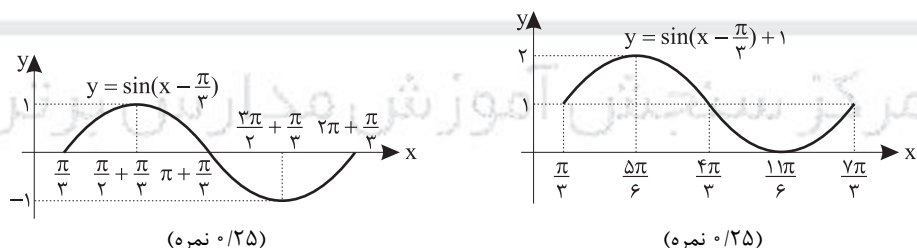
$$m(t) = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}} \Rightarrow \frac{1}{2^{\frac{t}{4}}} = \frac{1}{100} \Rightarrow 2^{\frac{t}{4}} = 100 \quad (\text{نمره } \frac{1}{25})$$

$$\frac{t}{4} = \log_2 100 = \log_2 10^2 = 2 \log_2 10 \Rightarrow t = 8 \log_2 10 \quad (\text{نمره } \frac{1}{25})$$

$$\Rightarrow t = 8 \times \frac{1}{\log_{10} 2} = \frac{8}{\log 2} = \frac{8}{0.3} = \frac{80}{3} \quad (\text{نمره } \frac{1}{25})$$

پاسخ سؤال ۷:

الف)

(نمره $\frac{1}{25}$)(نمره $\frac{1}{25}$)

(ب)

$$A = \frac{2 \sin(16\pi + \pi - \alpha) + \sin(\pi + \frac{\pi}{3} + \alpha)}{4 \cos(2\pi + \pi + \alpha) - \cos(\frac{5\pi}{3} - \alpha)}$$

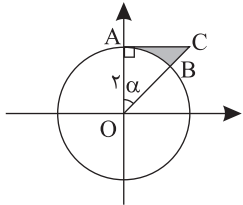
$$= \frac{2 \sin(\pi - \alpha) - \sin(\frac{\pi}{3} + \alpha)}{4 \cos(\pi + \alpha) - \cos(2\pi + \frac{\pi}{3} - \alpha)} \quad (\text{نمره } \frac{1}{25}) = \frac{2 \sin \alpha - \cos \alpha}{-4 \cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha - 2 \sin \alpha}{4 \cos \alpha + \sin \alpha} \quad (\text{نمره } \frac{1}{25})$$

صورت و مخرج کسر فوق را بر $\cos \alpha$ تقسیم می‌کنیم.

$$A = \frac{\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} - \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{4 \cos \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} \quad (\text{نمره } \frac{1}{25}) = \frac{1 - 2 \tan \alpha}{4 + \tan \alpha} = \frac{1 - 2 \times \frac{1}{2}}{4 + \frac{1}{2}} = \frac{0}{\frac{9}{2}} = 0 \quad (\text{نمره } \frac{1}{25})$$



پاسخ سؤال ۸:

زاویه AOB را α رادیان در نظر می‌گیریم.

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} r^2 \alpha = \frac{1}{2} \times 2^2 \alpha = 2\alpha$$

$$\triangle OAC: \tan \alpha = \frac{AC}{OA} = \frac{AC}{2} \Rightarrow AC = 2 \tan \alpha$$

$$S_{OAC} = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \tan \alpha = 2 \tan \alpha \quad (\text{نمره } 0.25)$$

$$S_{OAC} - S_{AOB} = 2 \tan \alpha - 2\alpha = 2(\tan \alpha - \alpha) \quad (\text{نمره } 0.25)$$

$$\Rightarrow 2(\tan \alpha - \alpha) = 2 - \frac{\pi}{2} = 2(1 - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \tan \alpha - \alpha = 1 - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \quad (\text{نمره } 0.25)$$

$$AB \text{ طول کمان } l = r \cdot \alpha = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{نمره } 0.25)$$

